

УДК 517.983.53

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

С.С.МИРЗОЕВ, Г.И.ЗАМАНОВ

Бакинский Государственный Университет

mirzoyev.sabir@mail.ru

В работе найдены достаточные условия, обеспечивающие регулярную разрешимость одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения высокого порядка, эллиптического типа на конечном отрезке в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, граничная задача.

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство, A - положительно определенный самосопряженный оператор в H , а H_γ ($\gamma \geq 0$) шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором A^γ , т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $(x, y)_\gamma = (A_x^\gamma, A_y^\gamma)$, $H_0 = H$.

Рассмотрим в пространстве H краевую задачу

$$P(d/dt)u = (-1)^k u^{(n)}(t) + A^n u(t) + \sum_{j=0}^n A_{n-j} u^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in (0,1), \quad (1)$$

$$u^{(2j)}(0) = 0, \quad u^{(2j)}(1) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}, \quad (2)$$

где $n = 2k$, $k \in N$, $f(t), u(t)$ - функции, определенные в интервале $(0,1)$ почти всюду со значениями в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

- 1) A - положительно определенный самосопряженный оператор в H ;
- 2) операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = \overline{0, n}$) ограничены в H .

Обозначим через $L_2((0,1); H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$, определенных в $(0,1)$ почти всюду, со значениями в H , для которых

$$\|f\|_{L_2((0,1);H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Следуя монографию [1], введем гильбертово пространство

$$W_2^n((0,1);H) = \{u : u^{(n)} \in L_2((0,1);H), A^n u \in L_2((0,1);H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^n((0,1);H)} = \left(\|A^n u\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|u^{(n)}\|_{L_2((0,1);H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Изотермы о следах [1] следует, что

$$\overset{0}{W}_2^n((0,1);H) = \{u : u \in W_2^n((0,1);H), u^{(2j)}(0) = u^{(2j)}(1) = 0, j = \overline{0, k-1}\}$$

есть полное гильбертово пространство: $\overset{0}{W}_2^n((0,1);H) \subset W_2^n((0,1);H)$.

Определение. Если при любом $f(t) \in L_2((0,1);H)$ существует функция $u(t) \in W_2^n((0,1);H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в интервале (0,1) почти всюду, крайевым условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u^{(2j)}(t)\|_{n-2j-1/2} = 0, \lim_{t \rightarrow 1-0} \|u^{(2j)}(t)\|_{n-2j-1/2} = 0, j = \overline{0, k-1}$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^n((0,1);H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1);H)},$$

то будем называть задачу (1),(2) регулярно разрешимой.

В данной работе мы найдем условия на коэффициенты уравнения (1), обеспечивающие регулярно разрешимости задачи (1),(2). В бесконечной области некоторые крайевые задачи исследованы, например, в работах [2-4]. При $n=4$ аналог задачи (1),(2) рассмотрена в работе [5], а при $n=2$ в работах [6,7].

Обозначим через

$$P_0 u = P_0 (d/dt)u = (-1)^k u^{(n)} + A^n u, P_1 u = \sum_{j=0}^n A_{n-j} u^{(j)}, u \in \overset{0}{W}_2^n((0,1);H).$$

Имеет место

Теорема 1. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{0}{W}_2^n((0,1);H)$ на пространство $L_2((0,1);H)$.

Доказательство. Обозначим через

$$\varphi_m(t) = \sqrt{2} \sin \pi m t, f_m = \int_0^1 f(t) \varphi_m(t) dt, u_m = \int_0^1 u(t) \varphi_m(t) dt, m = \overline{1, \infty}.$$

Сперва покажем, что $\text{Ker}P_0 = \{0\}$. Умножив уравнение $P_0u = 0$ скалярно в $L_2((0,1);H)$ на $A^n u$ получаем, что $((-1)^k (u^{(m)} + A^n u, A^n u)_{L_2((0,1);H)} = 0$, или $((-1)^k (u^{(n)}, A^n u)_{L_2((0,1);H)} + \|A^n u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = 0$.

Интегрируя по частям, при $u \in \dot{W}_2^n((0,1);H)$ имеем, что

$$((-1)^k (u^{(n)}, A^n u)_{L_2((0,1);H)} = \|A^k u^{(k)}\|_{L_2((0,1);H)}^2.$$

Следовательно, $\|A^k u^{(k)}\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|A^n u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = 0$, т.е. $u = 0$.

Теперь покажем, что $\text{Im}P_0 = L_2((0,1);H)$. Умножая уравнение $P_0u = f$ на функцию $\sqrt{2} \sin \pi n t = \varphi_m(t)$ скалярно получаем

$$(-1)^k \int_0^1 u^{(n)}(t) \sin \pi n t dt + \int_0^1 A^n u(t) \sin \pi n t dt = \int_0^1 f(t) \sin \pi n t dt.$$

Отсюда имеем:

$$((\pi n)^n E + A^n) u_m = f_m, \quad m = \overline{1, \infty},$$

где $f_m, u_m \in H$. Отсюда имеем, что

$$u_n = ((\pi n)^n E + A^n)^{-1} f_m, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad n = 2k, \quad k \in N.$$

Тогда

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((\pi n)^n E + A^n)^{-1} f_m(t) \sin \pi n t.$$

Покажем, что $u(t) \in W_2^n((0,1);H)$. По теореме Планшареля

$$\begin{aligned} \|u^{(n)}\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|A^n u\|_{L_2((0,1);H)}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\| (\pi n)^n \cdot ((\pi n)^n E + A^n)^{-1} f_m \right\|^2 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\| A^n \cdot ((\pi n)^n E + A^n)^{-1} f_m \right\|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \|f_m\|^2 = 2 \|f\|_{L_2((0,1);H)}^2, \end{aligned}$$

поскольку

$$\left\| (\pi n)^n \cdot ((\pi n)^n E + A^n)^{-1} f_m \right\| \leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| (\pi n)^n \cdot ((\pi n)^n E + \mu^n)^{-1} \right\| \cdot \|f_m\| \leq \|f_m\|$$

$$\text{и } \left\| A^n \cdot ((\pi n)^n E + A^n)^{-1} f_m \right\| \leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^n \cdot ((\pi n)^n E + \mu^n)^{-1} \right\| \cdot \|f_m\| \leq \|f_m\|.$$

Следовательно, $\|u\|_{W_2^n((0,1);H)} \leq 2 \|f\|_{L_2((0,1);H)}$, т.е. $u \in W_2^n((0,1);H)$.

Далее из теоремы о следах следует, что выполняются условия (2), т.е. $u \in W_2^n((0,1);H)$. Очевидно, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$P_0 u = f$. Так как, $\|u\|_{W_2^n((0,1);H)} \leq 2\|f\|_{L_2((0,1);H)}$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы Банаха об обратном операторе. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что нормы $\|u\|_{W_2^n((0,1);H)}$ и $\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}$ эквивалентны в пространстве $\overset{0}{W}_2^n((0,1);H)$. Тогда из теоремы о промежуточных производных [1], следует, что их нормы можно оценить сверху с $\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}$.

Имеет место

Теорема 2. При всех $u \in \overset{0}{W}_2^n((0,1);H)$ имеет место следующее неравенство

$$\|A^{n-j} u^{(j)}\|_{L_2((0,1);H)} \leq c_j \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}, \quad j = \overline{0, n},$$

где $c_0 = c_n = 1$, $c_j \left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}} \cdot \left(\frac{n-j}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Доказательство. Пусть $u \in \overset{0}{W}_2^n((0,1);H)$. Тогда, полагая $P_0 u = f$, получаем, что $u = P_0^{-1} f$. Следовательно,

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin \pi m t = \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left((\pi m)^n E + A^n \right)^{-1} f_m(t) \sin \pi m t.$$

Отсюда имеем

$$\|A^{n-j} u^{(j)}\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| A^{n-j} (\pi m)^j \cdot \left((\pi m)^n E + A^n \right)^{-1} \right\|^2 \cdot \|f_m\|^2. \quad (3)$$

Так как из спектрального разложения A следует, что

$$\begin{aligned} \left\| A^{n-j} \left((\pi m)^n E + A^n \right)^{-1} \right\| &\leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \mu^{n-j} (\pi m)^j \left((\pi m)^n + \mu^n \right)^{-1} \right| \leq \\ &\leq \sup_{\tau \geq 0} \left| \tau^j (1 + \tau^n)^{-1} \right| \leq c_j, \end{aligned}$$

где $c_0 = c_n = 1$, а $c_j \left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}} \cdot \left(\frac{n-j}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, $j = \overline{1, n-1}$, то утверждение теоремы следует из неравенства (1).

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$q = \sum_{j=0}^n c_j \|B_j\| < 1,$$

где числа c_j определены из теоремы 2. Тогда задача (1),(2) регулярно разрешимы.

Доказательство. Запишем задачу (1),(2) в виде уравнения $Pu = P_0u + P_1u = f$, где $u \in \overset{0}{W}_2^n((0,1);H)$, $f \in L_2((0,1);H)$. По теореме 1 P_0 есть изоморфизм. После замены $P_0u = \omega$ мы получаем уравнение $\omega + P_1P^{-1}\omega = f$ в пространстве $L_2((0,1);H)$. Так как при любом $\omega \in L_2((0,1);H)$

$$\begin{aligned} \|P_1P^{-1}\omega\|_{L_2((0,1);H)} &= \|P_1u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \sum_{j=0}^n \|B_{m-j}\| \cdot \|A^{n-j}u^{(j)}\|_{L_2((0,1);H)} \leq \cdot \\ &\leq \sum_{j=0}^n \|B_{m-j}\| \cdot c_j \cdot \|P_0u\|_{L_2((0,1);H)} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|B_{m-j}\| \cdot c_j \right) \cdot \|u\|_{L_2((0,1);H)} = q \| \omega \|_{L_2((0,1);H)} \end{aligned}$$

и $q < 1$, то оператор $E + P_1P_0^{-1}$ обратим в $L_2((0,1);H)$. Здесь мы учитывали, что $c_j = c_{m-j}$, $j = \overline{0, n}$. Тогда $\omega = (E + P_1P_0^{-1})^{-1}f$ и $u = P_0^{-1}(E + P_1P_0^{-1})^{-1}f$. Отсюда следует, что $\|u\|_{\overset{0}{W}_2^n((0,1);H)} \leq const \|f\|_{L_2((0,1);H)}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 241 с.
2. Алиев А.Р., Мирзоев С.С. К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка // Функциональный анализ и его приложения, 2010, т.44, в.3, с.747-750.
3. Mirzoyev S.S., Bagirova S.H. On Solvability of one Class Nonlocal Boundary Value Problems for the Fourth Order in Hilbert Space // Applied Mathematical Sciences, v.7, 2013, No79, p.2423-2434.
4. Мирзоев С.С. Об условиях корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, №2, т.243, 1983, с.282-285.
5. Zamanov H.I. On the Solvability of one Boundary Value Problem of Fourth Order Operator Differential Equations on the Finite Segment // Journal of Qafqaz University, Mathem. and Computer Science, 1914, v.2, No2, p. 181-187.
6. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О разрешимости краевой задачи с операторным коэффициентом в краевом условии // Матем. заметки, т.91, №6, 2012, с.861-887.
7. Мирзоев С.С., Карааслан М.Д., Гумбагалиев Р.З. К теории операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. РАН, 2013, т.453, с.610-612.

**YÜKSƏK TƏRTİBLİ OPERATOR DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN
BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLOLUNMASI HAQQINDA**

S.S.MİRZƏYEV, H.İ.ZAMANOV

XÜLASƏ

İşdə Hilbert fəzasında elliptik tip yüksək tərtibli operator-diferensial tənklər üçün bir sonlu parçada sərhəd məsələsinin rəqulyar həll olunmasını təmin edən kafi şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər operator-diferensial tənliyin əmsallarının xassələri ilə ifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-diferensial tənklər, sərhəd məsələsi.

**ON THE SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR HIGH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

S.S.MIRZAYEV, H.I.ZAMANOV

SUMMARY

The sufficient conditions providing the regular solvability of one boundary value problem for high order operator-differential equations of elliptic type in finite segment in Hilbert space are found. These conditions are expressed by the properties of the coefficients of operator-differential equations.

Key words: Hilbert space, operator-differential equation, boundary value problem

Поступила в редакцию: 11.11.2015 г.

Подписано к печати: 12.02.2016 г.